18/12/2019 (1)

Διάλεξη

ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΕΣ ΚΑΙ ΜΗ ΕΥΚ.

Ορισμός: Υ-ισομετρία καλείται μια απεικόνιση $\phi: \mathbb{H}^2 \to \mathbb{H}^2$ τ.ω $\phi = \phi_1 \circ \phi_2 \circ \dots \circ \phi_k$, όπου ϕ_i είναι η αντιστροφή που έχει κύκλο αντιστροφής με κέντρο στον ορίζοντα ή κατοπτρισμό ως προς ευθεία κάθετη στον ορίζοντα (και στις 2 περιπτώσεις περιορισμένες στον $\mathbb{H}^2$)

Ορισμός: Δύο σχήματα $S, S' \subseteq \mathbb{H}^2$ είναι ίσα αν

$\exists\, \phi$: Υ-ισομετρία : $\phi(S) = S'$

Π.χ Η παράλληλη μεταφορά $\phi: \mathbb{H}^2 \to \mathbb{H}^2$ με τύπο $\phi(x,y) = (x+c, y)$, c: σταθερό είναι Υ-ισομετρία, αφού έχει σύνθεση δύο κατοπτρισμών

$$f_1(x,y) = \left(\frac{c}{2} - x, y\right), \quad f_2(x,y) = \left(-\frac{c}{2} - x, y\right)$$

με $$f_1 \circ f_2 = \left(\frac{c}{2} - \left(-\frac{c}{2} - x\right), y\right) = (c+x, y) = \phi$$

Άρα η ϕ είναι σύνθεση 2 κατοπτρισμών

(*) Κάθε Υ-ευθεία της μορφής $x=\omega$ είναι ίση με κάθε παράλληλη της.

↳ Αυτό συμβαίνει διότι αν θεωρήσω παράλληλη $\phi(x,y) = (c_2 - c_1 + x, y)$ με $c_2 > c_1$, κάθε κάθετη στην κάθετη προκύπτει με παράλληλη μεταφορά.

π.χ

Αποδεικνύεται ότι και οι ομοιοθεσίες είναι Υ-ισομετρίες.

(*) Αν θέλω να δείξω ότι 2 σχήματα είναι ίσα μπορώ να χρησ. ομοιοθεσίες

(! Δεδομένων 2 σημείων να βρεθεί μια Υ-ευθεία!)

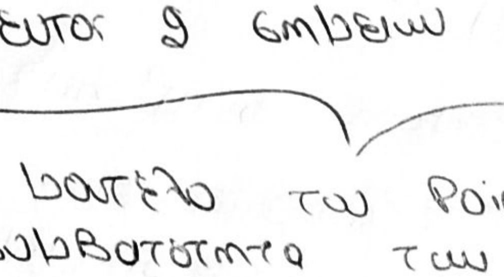
▸ Στο μοντέλο του Poincaré εύκολα επαληθεύουμε την συμβατότητα των πρώτων 4 αιτημάτων (Ευκλείδη)

↳ Από 2 διαφορετικά σημεία διέρχεται μοναδική Υ-ευθεία.

Θα διακρίνω 2 περιπτώσεις:

i) $A=(x_0,y_0)$ και $B=(x_0,y_1) \xRightarrow{y_0,y_1>0}$ η μοναδική Υ-ευθεία είναι η κάθετη στον ορίζοντα: $x=x_0$

ii)



Άρα $\exists$ μοναδική Υ-ευθεία της μορφής $(x-x_0)^2 + y^2 = r^2$. Τα A, B να ανήκουν

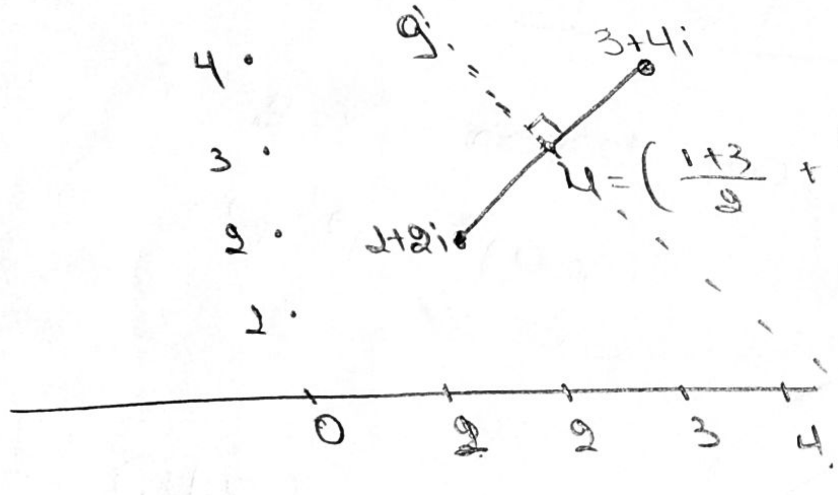
Η απόδειξη μας δίνει την ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ εύρεσης Υ-ευθείας.

"Ενώνω τα Α, Β. Φέρω μεσοκάθετη g στο ΑΒ (γνωρίζω ότι αυτή είναι μοναδική). Η g τέμνει τον ορίζοντα σε $O(x_0, 0)$. Με κέντρο Ο και ακτίνα ΟΑ γράφω κύκλο. Αυτή είναι η ζητούμενη Υ-ευθεία. ($OA = OB$ αφού g: μεσοκάθετος)".

↓

π.χ.

Έστω $1+2i$ και $3+5i \in \mathbb{H}^2$.



$M = \left(\frac{1+3}{2} + \frac{2+4}{2}\right) = (2,3) = 2+3i$

Η $g: y = \lambda_g x + \beta$. Αφού το $M \in g$ την επαληθεύει άρα $\boxed{3 = 2\lambda_g + \beta}$: (1)

Έχω ότι $\lambda_{\vec{AB}} = \frac{y}{x} = \frac{2}{2} = 1$, αφού $\vec{AB} = (x, y) = (3-1, 4-2) = (2,2)$

αφού $\lambda_g \cdot \lambda_{AB} = -1 \Rightarrow \lambda_g = -1$. άρα στην (1)

$\Rightarrow \beta = 5$

Άρα $g: y=-x+5$

για $y=0 \Rightarrow x=5$.

Y-ευθεία: $(x-5)^2+y^2=\rho^2$

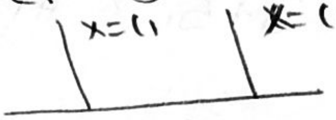
$\rho = d(A,C) = \sqrt{(5-1)^2+(0-2)^2} = \sqrt{20}$

Άρα Y-ευθεία: $\boxed{(x-5)^2+y^2=20}$

<u>Θεώρημα</u>: Δύο (οποιεσδήποτε) Y-ευθείες είναι μεταξύ τους ίσες

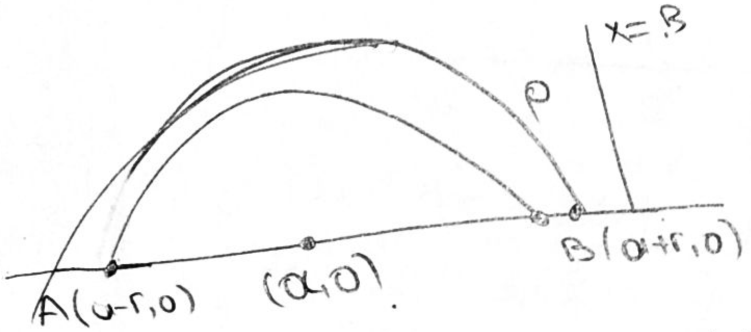
<u>απόδ</u>

<u>1η περ</u>: οι Y-ευθείες είναι της μορφής $x=c_1$, $x=c_2$



<u>2η περ</u>: (ε_1) είναι της μορφής $x=\beta$

(ε_2) ———''——— $(x-\alpha)^2+y^2=r^2$



$(\alpha \neq \beta)$

& διαισθητικά λέω ότι κατοπτρισμός, η παραλ. μετ. δεν μπορεί να είναι:

Θεωρώ τον κύκλο αντιστροφής $C'(A,\rho)$ τ.ω. η ρ: $AB \cdot A\Gamma = \rho^2$. (άρα $B \xleftrightarrow{C'} \Gamma$)

$\Rightarrow$ τ.η ευθεία $(x-\alpha)^2+y^2=r^2 \xrightarrow{C'} x=\beta$ και άρα ίσα

αφού κύκλος (c) που διέρχ. από κέντρο αντιστρ. → σε ευθεία που δεν διέρχ.

Δηλαδή απεικονίζεται σε ευθεία μορφής $x=c_0$ και καθώς $B \to \Gamma$ περιέχεται σε αυτή την ευθεία $c_0=B$ και λόγω της μοναδ. καθέτου έπεται το ζητούμενο

Θέλω: ~~Δύο~~ δύο Υ-ευθείες είναι ίσες.

3η περ: Ημικύκλια

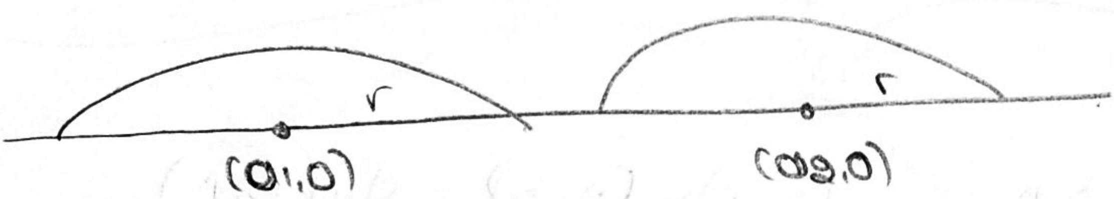
α) $(\varepsilon_1): (x-a_1)^2+y^2=r^2$

$(\varepsilon_2): (x-a_2)^2+y^2=r^2$

$$\underbrace{\begin{array}{l}(\varepsilon_1)\ (x-a_1)^2+y^2=r_1^2 \\ (\varepsilon_2)\ (x-a_2)^2+y^2=r_2^2\end{array}}$$

με χρήση ολοκληρωτικής αποδ. η ύπαρξη Υ-ισομετρίας

Η υποπερίπτωση (α) είναι παράλληλη μεταφορά

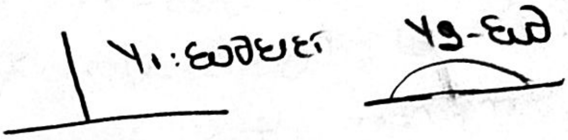


$\Phi(x,y) = (a_2-a_1+x,\ y) : H^2 \to H^2$.

Τότε $\boxed{Y\text{-}\varepsilon_1 = Y\text{-}\varepsilon_2}$

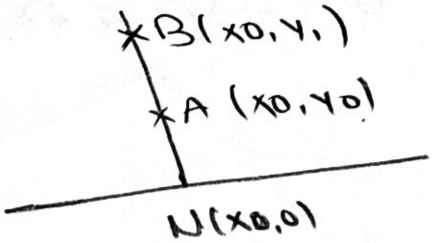
Υπερβολική απόσταση :

6. Θα ορίσουμε για διευκ.



Ορ.: Έστω $A \neq B$ σημεία μιας Y_1 ευθείας.
Τότε ορίζουμε την Y-απόσταση αυτών ως

$$d_Y(AB) = \left| \log \frac{(NB)}{(NA)} \right|$$



$$(NB) = \sqrt{(x_0 - x_0)^2 + (y_1 - 0)^2}$$
$$= |y_1| \underset{\mathbb{H}^2}{=} y_1$$

και όμοια $(NA) = y_0$.

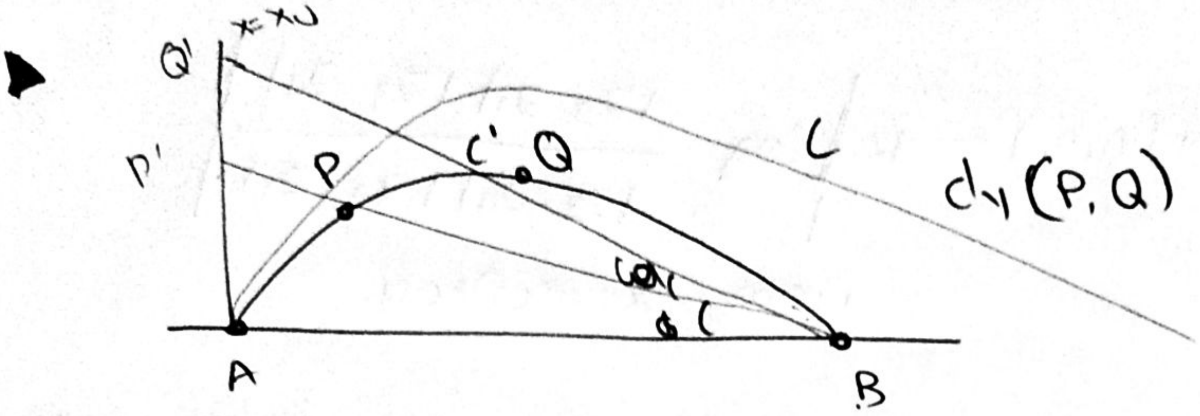
άρα ο τύπος : $d_Y(A,B) = \left| \log \frac{y_1}{y_0} \right|$

Παρατηρήσεις: ① Η Y-απόσταση μένει αναλλοίωτη κάτω από Y-ισομετρίες.
(αν ϕ : Y-ισομετρία $\Rightarrow d_Y(P,Q) = d_Y(\phi(P), \phi(Q))$

SOS

② $d_Y(A,B) \geq 0$, ③ $d_Y(A,B) = d_Y(B,A)$

④ $d_Y(A,B) = d_Y(A,\Gamma) + d_Y(\Gamma,B)$



Ψάχνω μια αντιστρ. που θα μου "στείλει" τον κύκλο σε μια ευθεία. Απόδειξη:

Θεωρώ αντιστροφή $C(B, AB(\text{ακτίνα}))$

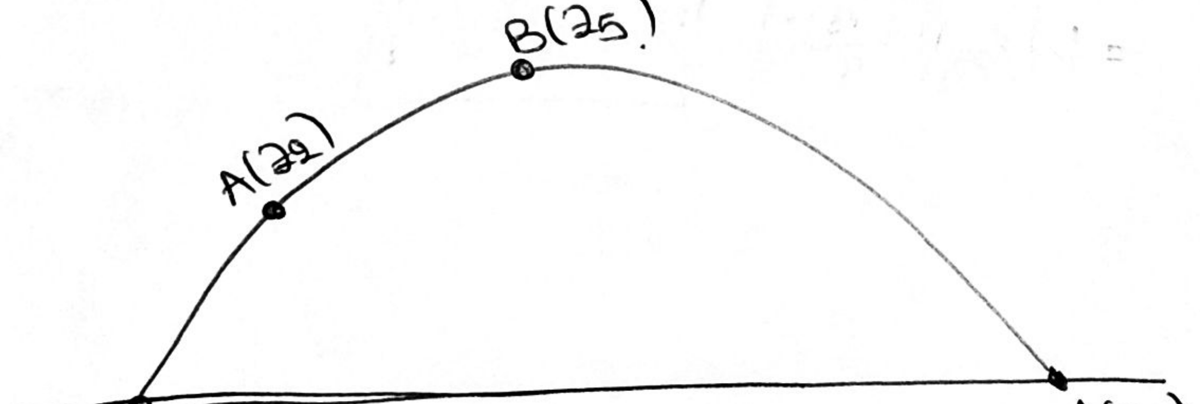
Το $A \xrightarrow{C} A$ (στον εαυτό του)

Όπως πριν αναγκαστικά $C' \longrightarrow x=x_0$

$$d_Y(P,Q) = d_Y(\phi(P),\phi(Q)) = d_Y(P',Q') = \log\left|\frac{(AQ')}{(AP')}\right| = \log\left|\frac{\tan\omega}{\tan\phi}\right|$$

Ξέρω ότι $\tan\phi = \dfrac{AP'}{AB}$, $\tan\omega = \dfrac{AQ'}{AB}$

Εύρεση Y-αποστάσεων για Y σημεία A, B:



Ισχύει $\quad d_Y(A,B) = k\left|\log \dfrac{|z_2-z_1|\cdot|z_3-z_4|}{|z_2-z_4|\,|z_3-z_1|}\right|$

, όπου k: σταθερά.

Π.χ.

Να βρεθεί η Υ-απόσταση των $z_2 = i$, $z_3 = 1+2i$

Λύση

Εύρεση Υ-ευθείας: όπως πριν $\quad (x-2)^2 + y^2 = 5$

$\xrightarrow[\text{θέτω } y=0]{\text{για εύρεση } \Gamma\Delta}$ $\quad (x-2)^2 = 5 \iff x-2 = \pm\sqrt{5}$

$\Rightarrow x = 2 \pm \sqrt{5}$

$\Gamma = (2-\sqrt{5}, 0) \Rightarrow z_1 = 2-\sqrt{5}$

$\Delta = (2+\sqrt{5}, 0) \Rightarrow z_4 = 2+\sqrt{5}$

αφού κάνω αντικατάσταση τους μιγαδικούς:

$d_Y(A,B) = k\left|\log\sqrt{\dfrac{3-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}}\right| \ldots$

$= k\left|\log\sqrt{\dfrac{(3-\sqrt{5})^2}{4}}\right| = \boxed{k\left|\log\left(\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\right|}$

Θεώρημα: Έστω X, Y, Z : Υ-σημεία διαφ. του $\mathbb{H}^2$

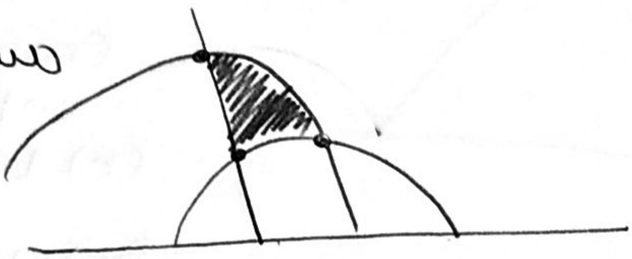
τότε $d_Y(X,Y) + d_Y(Y,Z) = d_Y(X,Z) \iff$

Το Y ανήκει στην Υ-ευθεία των X, Z.

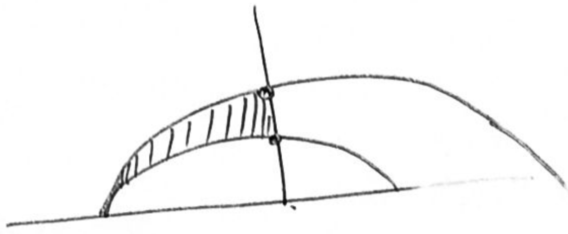
(η αποδ = 1 θέσεις)

Υ-τρίγωνα: Το είδος των Υ τριγώνων εξαρτάται από την θέση των κορυφών (προφανώς 3 μη συνευθειακά σημεία ορίζουν τρίγωνο)

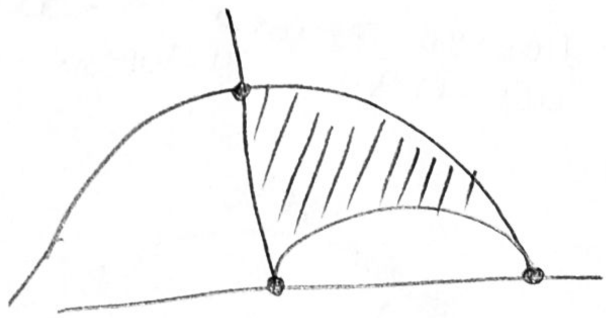
α) κανονικό Υ-τρίγωνο



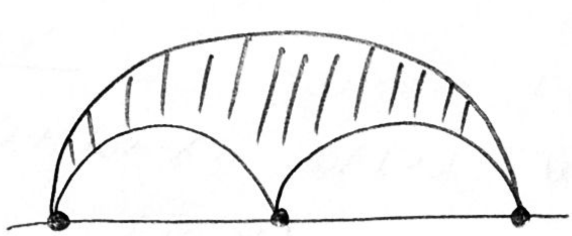
β) απλά ασυμ. τρίγωνο



γ) διπλά ασυμ. τρίγωνο



δ) τριπλά ασυμ. τρίγωνο

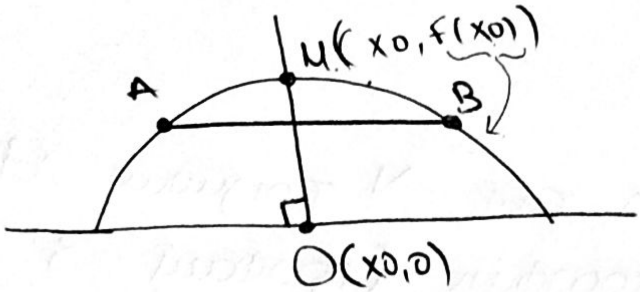


$\hat{\alpha} + \hat{\beta} + \hat{\gamma} \to \varepsilon > 0$

Εύρεση Υ-μέσου ενός Υ-τμήματος AB :

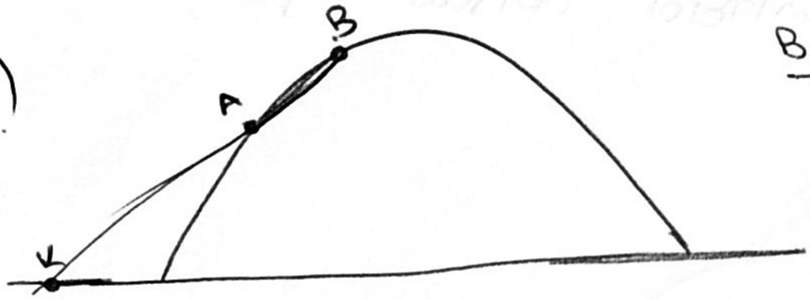
Υπάρχουν 3 περιπτώσεις (ανάλογα το AB)

i) AB // οριζόντια



η κάθετη από το κέντρο του κύκλου προς χορδή αυτή διχοτομεί χορδή και τόξο.

ii)

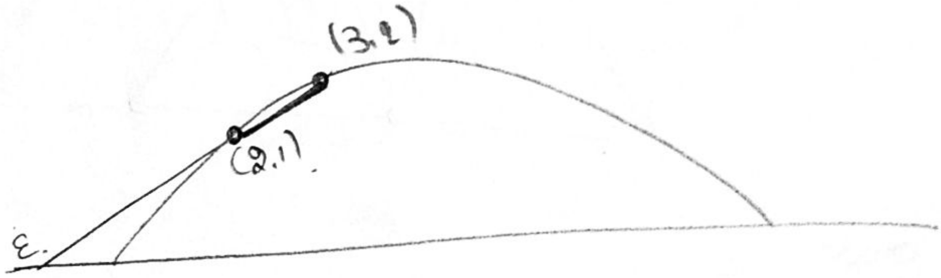


Βήμα 1: φέρω ευθεία (AB).

Έστω Κ σημείο τομής της (ε) με τον οριζόντια.

Βήμα 2: φέρω από Κ την εφαπτ. στον κύκλο. Έστω Μ το σημείο επαφής το υπάρχει

π.χ Αρχικά βρίσκω Υ-ευθεία: $(x-4)^2+y^2=5$ σημει.
Έστω ότι θέλω Υ-μέσο του $\underbrace{2+i}_{(2,1)}$, $\underbrace{3+2i}_{(3,2)}$



(ε): $y = x-1$. Εύρεση Κ $\xrightarrow{y=0}$ $(1,0)$

$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$ η εξ.

Αναλυτικά: οι κύκλοι εφαπτ. στο τυχόν (x_1,y_1) : $(x-x_0)(x_1-x_0)+(y-y_0)(y_1-y_0)=r^2$

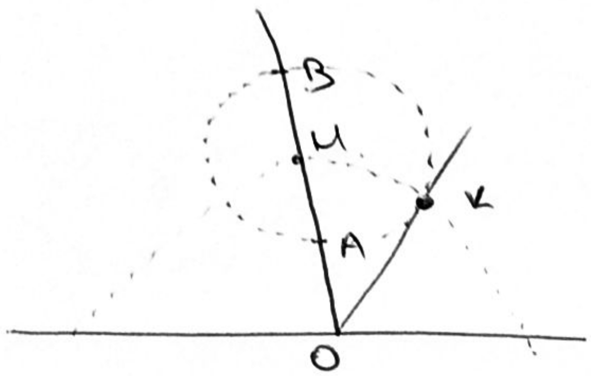
$\Rightarrow (x-4)(x_1-4)+yy_1=5 \ :(ε')$

Το Ν ∈ (ε') άρα την επαληθεύει. $\overset{x=1}{\underset{y=0}{\Longrightarrow}}$

και έτσι $x_1 = 7/3$

και επειδή το Ν επαληθεύει και το κύκλο για το y_1: θέτω $x_1 = 7/3 \Rightarrow y_1 = \frac{2\sqrt{5}}{3}$

iii)



Μ - μέσο των Α, Β ∈ y_1 ευθεία

① φέρω κύκλο διαμέτρου ΑΒ

② Από το Ο φέρω εφαπτομένη στον C. Έστω Κ το σημείο τομής

③ Με κέντρο το Ο και ακτίνα ΟΚ γράφω κύκλο

Το Ν σημείο τομής του C' με την y_1-ευθεία